

Производная и график

Задание №9 профильного ЕГЭ по математике

Производная показывает, как быстро меняется функция. В этом задании всё решается по-разному в зависимости от того, чей график дан: самой функции или её производной. Подпись под чертежом читается первой.

Два смысла производной

Смысл	Что это значит
Физический	Если $x(t)$ — координата, то скорость $v(t) = x'(t)$, а ускорение $a(t) = v'(t)$.
Геометрический	$f'(x_0)$ — угловой коэффициент касательной в точке x_0 : $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$, где α — угол наклона касательной к оси Ox .

Таблица производных

$C' = 0$	$x' = 1$	$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$(e^x)' = e^x$	$(a^x)' = a^x \ln a$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

Правила

$(u + v)' = u' + v'$	$(Cu)' = Cu'$	$(uv)' = u'v + uv'$
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	$(f(kx + b))' = k f'(kx + b)$	

Касательная

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$	$k = f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$
---------------------------------	--

Как снять k прямо с чертежа

- Взять на касательной две точки с целыми координатами.
- Посчитать по клеткам, на сколько выросла ордината и на сколько — абсцисса.
- $k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. У убывающей касательной $k < 0$.

Касательная параллельна прямой $y = kx + b$ тогда и только тогда, когда $f'(x_0) = k$. Горизонтальной она будет при $f'(x_0) = 0$.

Главная таблица: чей график дан

Что спрашивают	Дан график f	Дан график f'
Значение производной в точке	Провести касательную и найти её угловой коэффициент	Прочитать ординату точки графика

Что спрашивают	Дан график f	Дан график f'
Промежутки возрастания	Участки, где график поднимается	Участки, где график лежит выше оси: $f' > 0$
Промежутки убывания	Участки, где график опускается	Участки, где график лежит ниже оси: $f' < 0$
Точки максимума	Вершины «горок»	Нули f' , где знак меняется с плюса на минус
Точки минимума	Дно «ям»	Нули f' , где знак меняется с минуса на плюс
Сколько точек экстремума	Сколько вершин и впадин	Сколько раз график пересекает ось, меняя знак
Касательная параллельна $y = kx + b$	Точки, в которых наклон равен k	Сколько решений у уравнения $f'(x) = k$, то есть сколько раз график пересекает прямую $y = k$

Первообразная

F — первообразная для f , если $F'(x) = f(x)$. Все первообразные одной функции отличаются на постоянное слагаемое: $F(x) + C$.

$f(x)$	$F(x)$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $
e^x	e^x
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$

Площадь фигуры под графиком f на отрезке $[a; b]$ равна $S = F(b) - F(a)$. Если дан график первообразной, площадь читается как разность ординат на концах отрезка.

Где здесь теряют баллы

Путает график функции и график производной

Самая частая ошибка в этом номере. Подпись под чертежом читается первой, до всех рассуждений.

Пишет в ответ значение функции вместо точки экстремума

«Точка максимума» — это абсцисса x , а не значение y в этой точке.

Теряет знак углового коэффициента

У убывающей касательной $k < 0$. Минус пропадает чаще, чем ошибается арифметика.

Принимает любой ноль производной за экстремум

Экстремум есть только там, где f' меняет знак.