

Метод интервалов

Задание №16 профильного ЕГЭ по математике

Большинство неравенств в итоге сводится к одному виду: произведение скобок или дробь сравнивается с нулём. Такие неравенства решают методом интервалов. Здесь — сама схема, особые случаи и примеры.

К какому виду сводим

Переносим всё в одну сторону, чтобы справа стоял 0, а слева — произведение скобок или дробь из скобок:

$$(x - 1)(x + 3) > 0$$

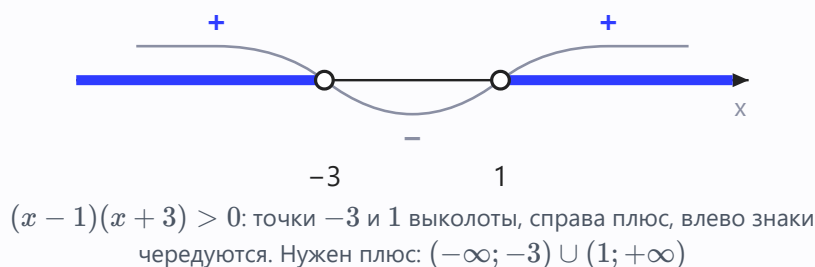
$$\frac{x - 3}{x + 1} \geq 0$$

$$(x + 3)^2(x - 4) < 0$$

Дальше для всех них работает одна и та же схема.

Схема

- 1 Смотрим, когда каждая скобка равна нулю, и ставим эти точки на числовую ось.
- 2 Точки числителя: при $\leq$ и $\geq$ — **закрашенные** (входят в ответ), при $<$ и $>$ — **выколотые**. Точки знаменателя — **всегда выколотые**: на ноль делить нельзя.
- 3 Определяем знак на самом правом промежутке: подставляем любое число правее всех точек. Если все скобки вида $x - a$, там плюс.
- 4 Идём влево: при переходе через каждую точку знак меняется на противоположный.
- 5 Выписываем промежутки с нужным знаком. Закрашенная точка — квадратная скобка, выколотая — круглая.

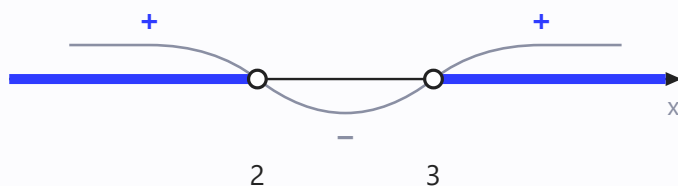


Особые случаи

Случай	Что делать
Чётная степень $(x + 3)^2$	В точке -3 знак не меняется : с обеих сторон один и тот же. Точку ставим как обычно; при $\leq, \geq$ она может войти в ответ отдельно, даже если вокруг не тот знак.
Минус перед x $(2 - x)(x + 6) > 0$	Скобку переворачиваем: $2 - x = -(x - 2)$, минус убираем и меняем знак неравенства : $(x - 2)(x + 6) < 0$. Или не переворачиваем, но знак справа тогда проверяем подстановкой.
Квадратный трёхчлен $x^2 - 5x + 6 > 0$	Раскладываем на скобки через корни: $(x - 2)(x - 3) > 0$. Полный квадрат $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$ — это чётная степень.
Общий множитель $x^3 - 4x \geq 0$	Выносим, а не сокращаем: $x(x - 2)(x + 2) \geq 0$, три точки. Делить на x нельзя — потеряешь точку 0 и знак.

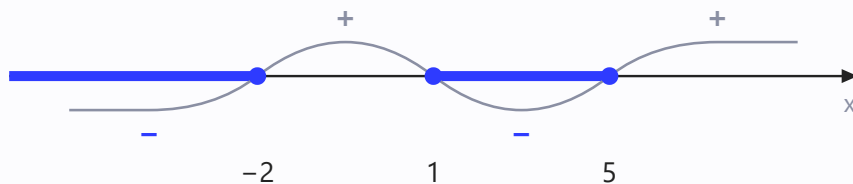
Примеры

1. $x^2 - 5x + 6 > 0$. Раскладываем: $(x - 2)(x - 3) > 0$. Точки 2 и 3 выколоты, справа плюс. Нужен плюс.



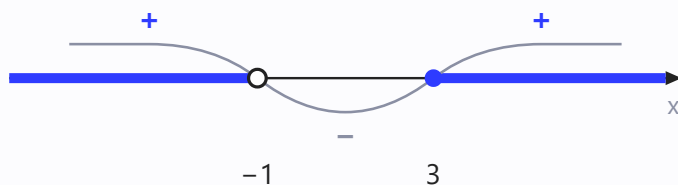
Ответ: $(-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$

2. $(x - 1)(x + 2)(x - 5) \leq 0$. Точки $-2, 1, 5$ закрашены, справа плюс. Нужен минус.



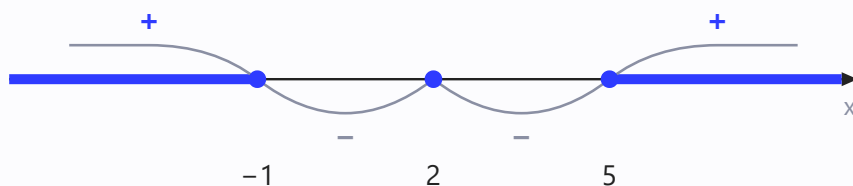
Ответ: $(-\infty; -2] \cup [1; 5]$

3. $\frac{x - 3}{x + 1} \geq 0$. Точка числителя 3 — закрашена, точка знаменателя -1 — выколота. Справа плюс. Нужен плюс.



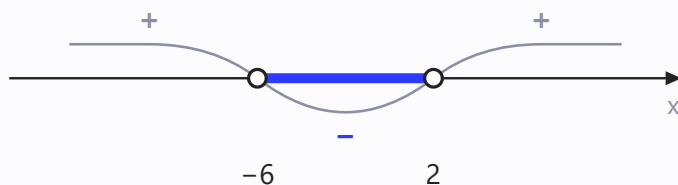
Ответ: $(-\infty; -1) \cup [3; +\infty)$

4. $(x - 2)^2(x + 1)(x - 5) \geq 0$. Точки $-1, 2, 5$ закрашены. У 2 чётная степень — знак не меняется. Нужен плюс, а в самой точке 2 выражение равно нулю, и $0 \geq 0$ верно — она входит в ответ отдельно.



Ответ: $(-\infty; -1] \cup \{2\} \cup [5; +\infty)$

5. $(2 - x)(x + 6) > 0$. Переворачиваем скобку и знак: $(x - 2)(x + 6) < 0$. Точки -6 и 2 выколоты, справа плюс. Нужен минус.



Ответ: $(-6; 2)$

Где теряют балл

Решили как уравнение

В ответе $x = -3$ и $x = 1$ вместо промежутков. Ответ неравенства — промежутки, иногда плюс отдельные точки.

Закрасили точку знаменателя

Нули знаменателя всегда выколоты, какой бы знак ни стоял: там выражение не существует.

Перепутали скобки

Выколотая точка — круглая скобка, закрашенная — квадратная. Бесконечность всегда с круглой.

Поменяли знак на чётной степени

$(x + 3)^2$: слева и справа от -3 знак один и тот же. Змейка отскакивает от точки, а не проходит сквозь неё.

Потеряли отдельную точку

$(x - 2)^2(x + 1)(x - 5) \geq 0$: вокруг 2 минус, но в самой точке ноль, а $0 \geq 0$ верно — точка в ответе.

Не перевернули знак при $-x$

$(2 - x)(x + 6) > 0$: справа от точек стоит минус, а не плюс. Переворачиваем скобку вместе со знаком неравенства или проверяем знак подстановкой.