

Случайная величина: математическое ожидание, дисперсия, отклонение

Задание №6 профильного ЕГЭ по математике

Новое задание ЕГЭ-2027. Случайная величина задана таблицей распределения: в верхней строке её значения, в нижней — вероятности, и вероятности в сумме дают единицу. Все три характеристики считаются по этой таблице арифметикой, без формул из старших курсов.

Таблица распределения

Случайная величина X принимает значения $x_1, x_2, \dots, x_n$ с вероятностями $p_1, p_2, \dots, p_n$, причём $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$. Если в условии даны не вероятности, а числа билетов, карточек или деталей, вероятность — это доля: число таких билетов делим на общее число билетов. И не забыть исход «ничего не выиграл»: его вероятность — всё, что осталось до единицы.

Три характеристики

Что	Формула	Что значит
Математическое ожидание	$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n$	среднее значение «в длинной серии»: сколько в среднем даёт один билет
Дисперсия	$D(X) = (x_1 - E)^2p_1 + \dots + (x_n - E)^2p_n$, где $E = E(X)$	средний квадрат отклонения от среднего: насколько величина «разбросана»
Стандартное отклонение	$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$	тот же разброс, но в единицах самой величины

Дисперсию быстрее считать по формуле $D(X) = E(X^2) - (E(X))^2$: сначала находим $E(X^2) = x_1^2p_1 + \dots + x_n^2p_n$, потом вычитаем квадрат математического ожидания. Обе формулы дают одно и то же число.

Задача 1. Математическое ожидание выигрыша

В акции разыгрывается 2 000 карточек с призами: 300 карточек по 50 рублей, 40 карточек по 500 рублей и 2 карточки по 5 000 рублей. Найдите математическое ожидание величины «приз на одну карточку».

- Карточек без приза 2 000 — $(300 + 40 + 2) = 1\,658$, приз по ним — 0 рублей.
- Вероятность каждого приза — доля таких карточек среди всех 2 000.
- $E(X) = \frac{50 \cdot 300 + 500 \cdot 40 + 5\,000 \cdot 2 + 0 \cdot 1\,658}{2\,000} = \frac{45\,000}{2\,000} = 22,5$.

Ответ: 22,5.

Задача 2. Дисперсия по таблице

Случайная величина X — число баллов за одно задание. Её распределение: значения 2, 3, 4, 5 с вероятностями 0,1; 0,4; 0,3; 0,2. Найдите дисперсию X .

- $E(X) = 2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,4 + 4 \cdot 0,3 + 5 \cdot 0,2 = 3,6$.
- $E(X^2) = 4 \cdot 0,1 + 9 \cdot 0,4 + 16 \cdot 0,3 + 25 \cdot 0,2 = 13,8$.
- $D(X) = 13,8 - 3,6^2 = 13,8 - 12,96 = 0,84$.

Ответ: 0,84. Стандартное отклонение здесь было бы $\sigma = \sqrt{0,84} \approx 0,92$.

Где теряют балл

Забыли исход с нулём

Билеты без выигрыша не дают денег, но входят в общее число билетов. Без них знаменатель меньше, чем надо, и ответ завышен.

Сложили вероятности вместо того, чтобы умножить на значения

Математическое ожидание — сумма произведений $x_i p_i$, а не сумма вероятностей и не среднее арифметическое значений.

Возвели в квадрат не то

В $E(X^2)$ в квадрат возводятся значения x_i , вероятности остаются как есть. В $(E(X))^2$ возводится уже готовое число.

Ответ в других единицах

Если выигрыши в рублях, то и $E(X)$ в рублях, а вот дисперсия — в рублях в квадрате; поэтому для «разброса в рублях» спрашивают стандартное отклонение.