КОНСПЕКТ · ЭВРИКА

Вектор и его длина

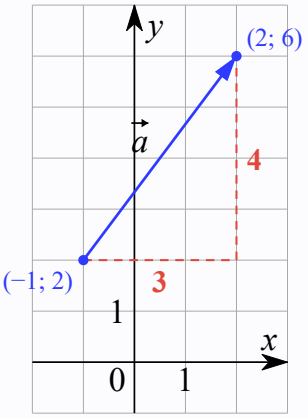
Задание №2 профильного ЕГЭ по математике

Первый урок курса по векторам. Здесь: координаты вектора и как снять их с чертежа, формула длины, умножение на число, сумма и разность — и задачи из урока с решениями.

Координаты вектора

Вектор — направленный отрезок: у него есть начало, конец и стрелка от начала к концу. **Координаты вектора — это координаты конца минус координаты начала:**

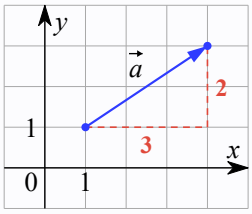
$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A;\ y_B - y_A)$$



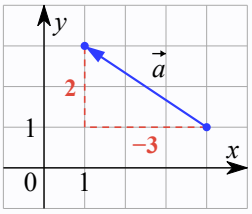
Из $(-1;2)$ в $(2;6)$: $2-(-1)=3$, $6-2=4$, значит $\vec{a}(3;4)$

> По чертежу координаты считают клетками: сколько клеток по горизонтали — первая координата, сколько по вертикали — вторая.

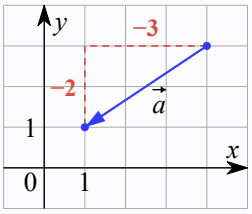
Знак координаты: вправо и вверх — плюс, влево и вниз — минус.



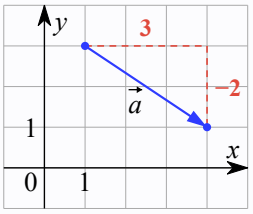
$\vec{a}(3;2)$: вправо и вверх — обе координаты положительные



$\vec{a}(-3;2)$: влево и вверх — первая отрицательная



$\vec{a}(-3;-2)$: влево и вниз — обе отрицательные



$\vec{a}(3;-2)$: вправо и вниз — вторая отрицательная

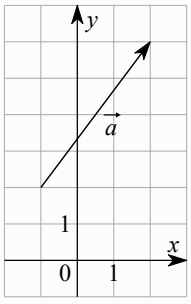
Длина вектора

Длина вектора — корень из суммы квадратов его координат:

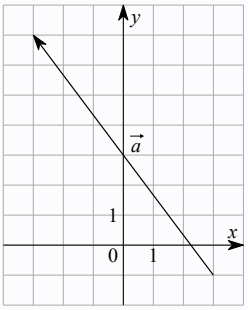
$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Вектор	Длина
$\vec{a}(5;12)$	$\sqrt{5^2+12^2} = \sqrt{169} = 13$
$\vec{a}(-8;6)$	$\sqrt{(-8)^2+6^2} = \sqrt{100} = 10$
$\vec{a}(7;24)$	$\sqrt{49+576} = \sqrt{625} = 25$
$\vec{a}(0;-9)$	$\sqrt{0+81} = 9$

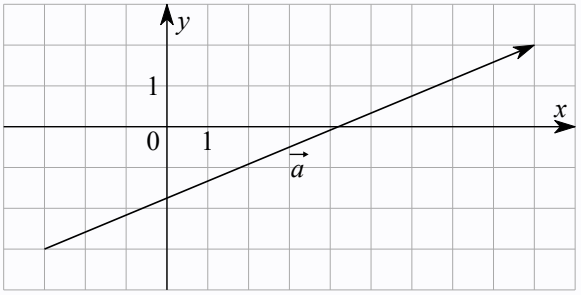
По чертежу: сначала снимаем координаты, потом считаем длину.



Из $(-1;2)$ в $(2;6)$: $\vec{a}(3;4)$, $|\vec{a}| = \sqrt{9+16} = 5$



Из $(3;-1)$ в $(-3;7)$: $\vec{a}(-6;8)$, $|\vec{a}| = \sqrt{36+64} = 10$



Из $(-3;-3)$ в $(9;2)$: $\vec{a}(12;5)$, $|\vec{a}| = \sqrt{144+25} = 13$

Умножение вектора на число

Каждая координата умножается на это число: $k\vec{a} = (kx;\ ky)$. Длина умножается на $|k|$ — знак множителя на длину не влияет.

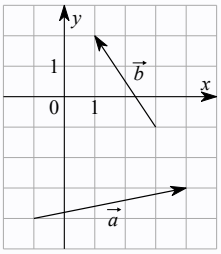
Дано	Вектор	Длина
$\vec{a}(-3;4)$, найти $\lvert 2\vec{a}\rvert$	$2\vec{a} = (-6;8)$	$\sqrt{36+64} = 10$
$\vec{a}(3;4)$, найти $\lvert 5\vec{a}\rvert$	$5\vec{a} = (15;20)$	$\sqrt{225+400} = 25$
$\vec{a}(12;5)$, найти $\lvert -2\vec{a}\rvert$	$-2\vec{a} = (-24;-10)$	$\sqrt{576+100} = 26$

Сумма и разность векторов

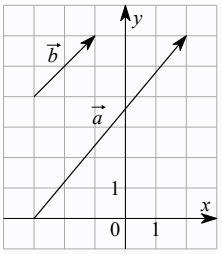
Складывают и вычитают покоординатно: $\vec{a}+\vec{b} = (x_1+x_2;\ y_1+y_2)$, $\vec{a}-\vec{b} = (x_1-x_2;\ y_1-y_2)$. Если есть множители, сначала умножаем, потом складываем.

Дано	Вектор	Длина
$\vec{a}(2;5)$, $\vec{b}(3;7)$, найти $\lvert\vec{a}+\vec{b}\rvert$	$(2+3;\ 5+7) = (5;12)$	$\sqrt{25+144} = 13$
$\vec{a}(5;3)$, $\vec{b}(-1;-5)$, найти $\lvert\vec{a}-\vec{b}\rvert$	$(5+1;\ 3+5) = (6;8)$	$\sqrt{36+64} = 10$
$\vec{a}(3;-2)$, $\vec{b}(-1;4)$, найти $\lvert 2\vec{a}+\vec{b}\rvert$	$(6-1;\ -4+4) = (5;0)$	$\sqrt{25+0} = 5$
$\vec{a}(2;0)$, $\vec{b}(1;4)$, найти $\lvert\vec{a}+3\vec{b}\rvert$	$(2+3;\ 0+12) = (5;12)$	$\sqrt{25+144} = 13$

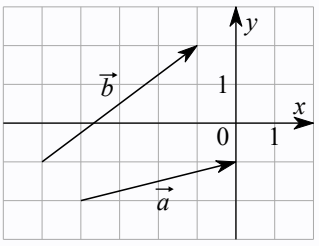
По чертежу: снимаем координаты обоих векторов, дальше так же.



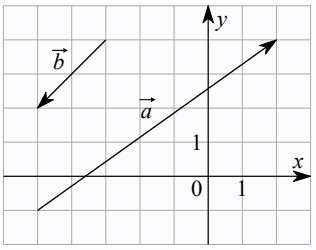
$\vec{a}(5;1)$, $\vec{b}(-2;3)$: $\vec{a}+\vec{b}=(3;4)$, длина 5



$\vec{a}(5;6)$, $\vec{b}(2;2)$: $\vec{a}-\vec{b}=(3;4)$, длина 5



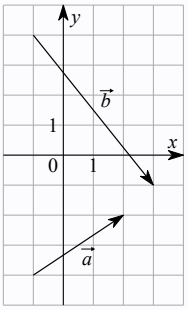
$\vec{a}(4;1)$, $\vec{b}(4;3)$: $2\vec{a}+\vec{b}=(12;5)$, длина 13



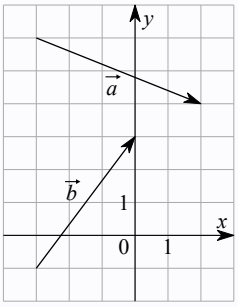
$\vec{a}(7;5)$, $\vec{b}(-2;-2)$: $2\vec{a}-\vec{b}=(16;12)$, длина 20

Абсцисса и ордината вектора

Абсцисса — первая координата вектора, ордината — вторая. Считаем вектор, как выше, и берём нужную координату: $\vec{a}(4;3)$, $\vec{b}(5;-2)$, абсцисса вектора $2\vec{a}-\vec{b}$: $(8-5;\ 6+2)=(3;8)$, абсцисса равна 3.



$\vec{a}(3;2)$, $\vec{b}(4;-5)$: $\vec{a}+\vec{b}=(7;-3)$, абсцисса 7



$\vec{a}(5;-2)$, $\vec{b}(3;4)$: $\vec{a}-\vec{b}=(2;-6)$, ордината -6

Где теряют балл

Координаты сняли наоборот

Координаты вектора — конец минус начало. Вектор из $(3;-1)$ в $(-3;7)$ — это $(-6;8)$, а не $(6;-8)$. На длину это не влияет, а на абсциссу и ординату — да.

Испугались минуса под корнем

$|(-8;6)|=\sqrt{64+36}=10$: квадрат отрицательного числа положителен, длина от знаков координат не зависит.

Длина $-2\vec{a}$

Знак множителя на длину не влияет: $|-2\vec{a}|=2\,|\vec{a}|$. Для $\vec{a}(12;5)$ это $2\cdot 13=26$.

Сложили длины вместо векторов

$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$ — это не $|\vec{a}|+\left|\vec{b}\right|$. Сначала складываем координаты: $(2;5)+(3;7)=(5;12)$, потом считаем длину: 13.

Перепутали абсциссу и ординату

Абсцисса — первая координата (x), ордината — вторая (y).